Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) **[20 ptos.]** Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(2x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

a) **[5 ptos.]** Determine si f es continua en $x = 0$.

b) **[5 ptos.]** Determine si f es derivable en $x = 0$.

c) **[10 ptos.]** Determine f' si $x \neq 0$ y defina explícitamente f'.

Ayuda:

- Utilice la definición de derivada para determinar si f es derivable en $x = 0$.
- Para calcular f' con $x \neq 0$, utilice reglas de las derivadas.

2) *a*) **[10 ptos.]** Calcular y simplifcar al máximo la derivada con respecto a x de

i) **[5 ptos.]** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{1-x}}$ ii) **[5 ptos.]** $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{e^{-x}}$

b) **[10 ptos.]** Dada la curva $(x^2+y^2)^2 = 4xy$ definida implícitamente, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(1,1)$.

3) *a*) **[10 ptos.]** Sea g una función diferenciable en $\mathbb{R}$. Considere

$$g(x) = x \cdot \ln(\cos(2x)) + x$$

Calcular $g'(x)$

b) **[10 ptos.]** Determinar la recta tangente a la curva g en el punto de abscisa $x = \pi$.

Pauta:

1) *a*) f es continua en $x=0 \iff \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2x)}{x} = f(0) = 0$. Basta calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\cdot \sin^2(3x)}{4x^2} = \lim_{x\to 0} 4x \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2 = 0\cdot 1^2 = 0$$

(5 pts)

b) $$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin^2(2h)}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(2h)}{h^2} = 4\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(2h)}{4h^2} = 4\cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin(2h)}{2h}\right)^2 = 4\cdot 1 = 4$$

Como el límite de $f'(0)$ existe, entonces f es diferenciable en $x=0$ **(5 pts)**

c) Derivando con respecto a x, obtenemos

$$\left(\frac{\sin^2(2x)}{x}\right)' = \frac{4x\sin(2x)\cos(2x)-\sin^2(2x)}{x^2} \quad \text{con} \quad x\neq 0$$

(5 pts)

Luego $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4x\sin(2x)\cos(2x)-\sin^2(2x)}{x^2} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 4 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$ **(5 pts)**

2) *a*) I) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{1-x}}}\cdot\left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{1-x}}}\cdot \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2-x}{2\cdot(1-x)^{3/2}}$$

(3+2 pts)

II) $$f'(x) = \frac{\sin(x)\cdot e^{-x} + e^{-x}(1-\cos(x))}{(e^{-x})^2} = \frac{\sin(x)+1-\cos(x)}{e^{-x}} = e^x(\sin(x)+1-\cos(x))$$

(3+2 pts)

b) Derivando con respecto a x, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left((x^2+y^2)^2\right) &= \frac{d}{dx}(4xy) \\ 4x(x^2+y^2)+4yy'(x^2+y^2) &= 4(y+xy') \\ x(x^2+y^2)+yy'(x^2+y^2) &= y+xy' \end{aligned}$$

(4 pts)

despejando y', se obtiene:

$$y' = \frac{y - x(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2) - x}$$

(3 pts)

Ahora evaluando y' en el punto $(1, 1)$, es decir:

$$y'(1, 1) = -1$$

(3 pts)

3) *a*)

$$\begin{aligned} g'(x) = x' \cdot \ln(\cos(2x)) + (\ln(\cos(2x)))' \cdot x + x' &= \ln(\sin(2x)) + x \cdot \frac{(\cos(2x))'}{\cos(2x)} + 1 \\ &= \ln(\cos(2x)) - \frac{2x \cdot \sin(2x)}{\cos(2x)} + 1 \end{aligned}$$

(4+3+3 pts)

b) La pendiente de la recta tangente está dada por

$$m = g'(\pi) = \ln(\cos(2\pi)) - \frac{2\pi \cdot \sin(2\pi)}{\cos(2\pi)} + 1 = 1$$

(5 pts)

Luego, la ecuación de la recta tangente T en el punto $P = (\pi, \pi)$ es

$$T \,:\, y - \pi = 1 \cdot (x - \pi) \Longrightarrow y = x$$

(5 pts)